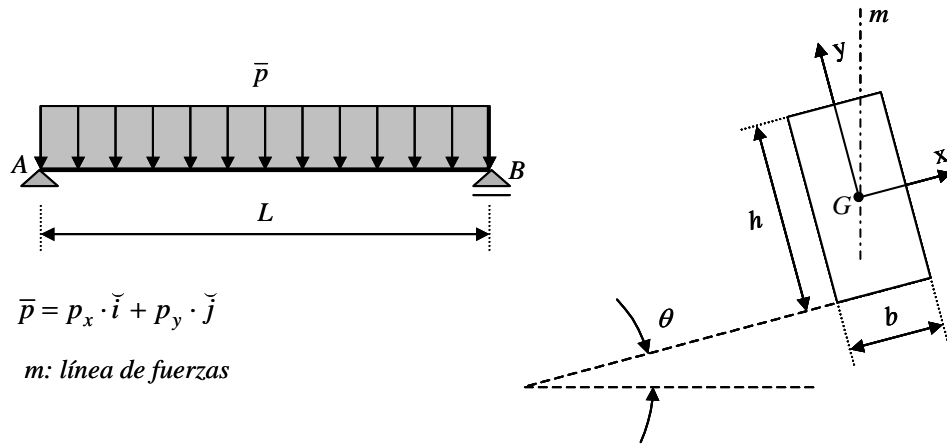


Ejercicio N° 7- Enunciado

La viga de madera de longitud L cuya sección es rectangular y su relación es K , posee una inclinación dada por el ángulo θ , estando apoyada en sus extremos y sometida a una carga uniformemente distribuida de magnitud p , que actúa en el plano vertical, según puede observarse en la figura 7.1, de acuerdo con los datos que se indican en la tabla 7.1

**Figura 7.1**

L	p	θ	$K = h/b$	σ_{adm}
m	kN/m	$^\circ$		kN/cm^2
3,10	3	15	2,5	1,1

Tabla 7.1

Se solicita lo siguiente:

1. Dimensionar la sección
2. Calcular analíticamente la posición del eje neutro
3. Verificar el punto anterior, mediante la circunferencia de Mohr
4. Verificar para la sección adoptada su condición resistente y trazar el diagrama de tensiones normales σ_z

Ejercicio N° 7- Resolución**1. Dimensionamiento de la sección**

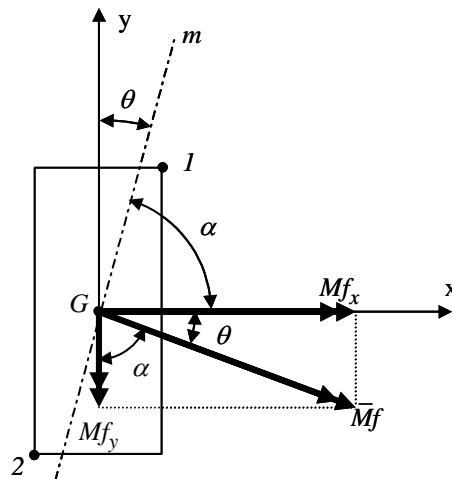
a) En primer lugar, debe determinarse la sección que soporta el momento flexor máximo y el valor del mismo. En el presente caso, por cuestiones de simetría, dicha sección es la correspondiente a la mitad de la longitud, siendo la misma:

$$Mf_{xmáx} = \frac{p \cdot l^2}{8}$$

sustituyendo por los valores:

$$Mf_{xmáx} = \frac{3 \cdot 3,1^2}{8} = 3,60 \cdot kN = 360 \cdot kN \cdot cm$$

b) Por otro lado, debe tenerse en cuenta que el problema planteado corresponde a una flexión oblicua de las características mostradas en la figura 7.2.



$$\alpha = 90^\circ - \theta$$

$$\alpha = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$$

Figura 7.2

$$\left. \begin{aligned} Mf_x &= Mf \cdot \sin(\alpha) \\ Mf_y &= Mf \cdot \cos(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

c) Además, las tensiones normales máximas $\sigma_{zmáx}$ ocurren en los puntos extremos (1) y (2), donde para el punto (1) se tiene compresión y para el (2) tracción, siendo ambas de igual valor absoluto, dado que los ejes x e y de referencia son ejes de simetría de la sección. Su expresión será:

$$\sigma_{zmáx} = \frac{Mf_x}{W_x} + \frac{Mf_y}{W_y} \quad (2)$$

d) Finalmente, para dimensionar desde el punto de vista resistente, debe cumplirse que:

$$\sigma_{zmáx} \leq \sigma_{adm}$$

Tomando el valor límite ($\sigma_{zmáx} = \sigma_{adm}$) y reemplazando (1) en (2), se tiene que:

$$\sigma_{adm} = Mf \cdot \left[\frac{\sin(\alpha)}{W_x} + \frac{\cos(\alpha)}{W_y} \right]$$

También:

$$\sigma_{adm} = \frac{Mf}{W_x} \cdot [\sin(\alpha) + K \cdot \cos(\alpha)]$$

De donde:

$$W_x = \frac{Mf}{\sigma_{adm}} \cdot [\sin(\alpha) + K \cdot \cos(\alpha)] \quad (3)$$

Siendo en este caso:

$$K = \frac{h}{b} = \frac{W_x}{W_y} = 2,5$$

Sustituyendo en (3) por sus valores:

$$W_x = \frac{360}{1,1} \cdot [\sin(75^\circ) + 2,5 \cdot \cos(75^\circ)]$$

$$W_x = 327,27 \cdot [0,9659 + 0,6470]$$

$$W_x = 527,85 \cdot cm^3$$

Para el presente problema:

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

teniendo en cuenta que $b = h / K$:

$$W_x = \frac{\left(\frac{h}{K}\right) \cdot h^2}{6} = \frac{h^3}{6 \cdot K}$$

de donde:

$$h = \sqrt[3]{6 \cdot K \cdot W_x} = \sqrt[3]{6 \cdot 2,5 \cdot 527,85} = \sqrt[3]{7917,75}$$

$$h = 19,93 \cdot cm$$

siendo:

$$b = \frac{h}{K} = \frac{19,93}{2,5}$$

$$b = 7,97 \cdot cm$$

En consecuencia, se adopta:

$$h = 20 \cdot cm$$

$$b = 8 \cdot cm$$

2. Cálculo analítico del eje neutro

De acuerdo a lo estudiado y siendo los ejes de referencia x e y ejes de simetría, la expresión que permite el cálculo del eje neutro es la siguiente (ver figura 7.3):

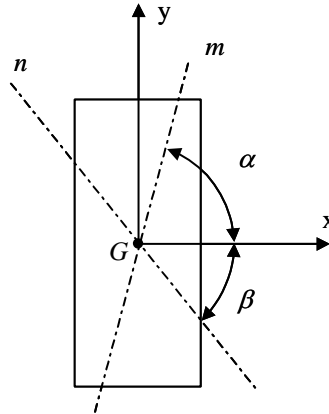


Figura 7.3

$$\tan(\beta) = -\frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{1}{\tan(\alpha)} \quad (4)$$

Siendo, para los valores determinados en el punto anterior:

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{8 \cdot 20^3}{12} = 5333,33 \cdot \text{cm}^4$$

$$J_y = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{20 \cdot 8^3}{12} = 853,33 \cdot \text{cm}^4$$

Sustituyendo en la expresión (4):

$$\tan(\beta) = -\frac{5333,33}{853,33} \cdot \frac{1}{\tan(75^\circ)}$$

$$\tan(\beta) = -6,25 \cdot \frac{1}{3,7321} = -1,6747$$

Finalmente:

$$\beta = -59^\circ \quad 09'$$

3. Verificación del punto anterior, mediante la circunferencia de Mohr

En la figura 7.4 se muestra la circunferencia de Mohr.

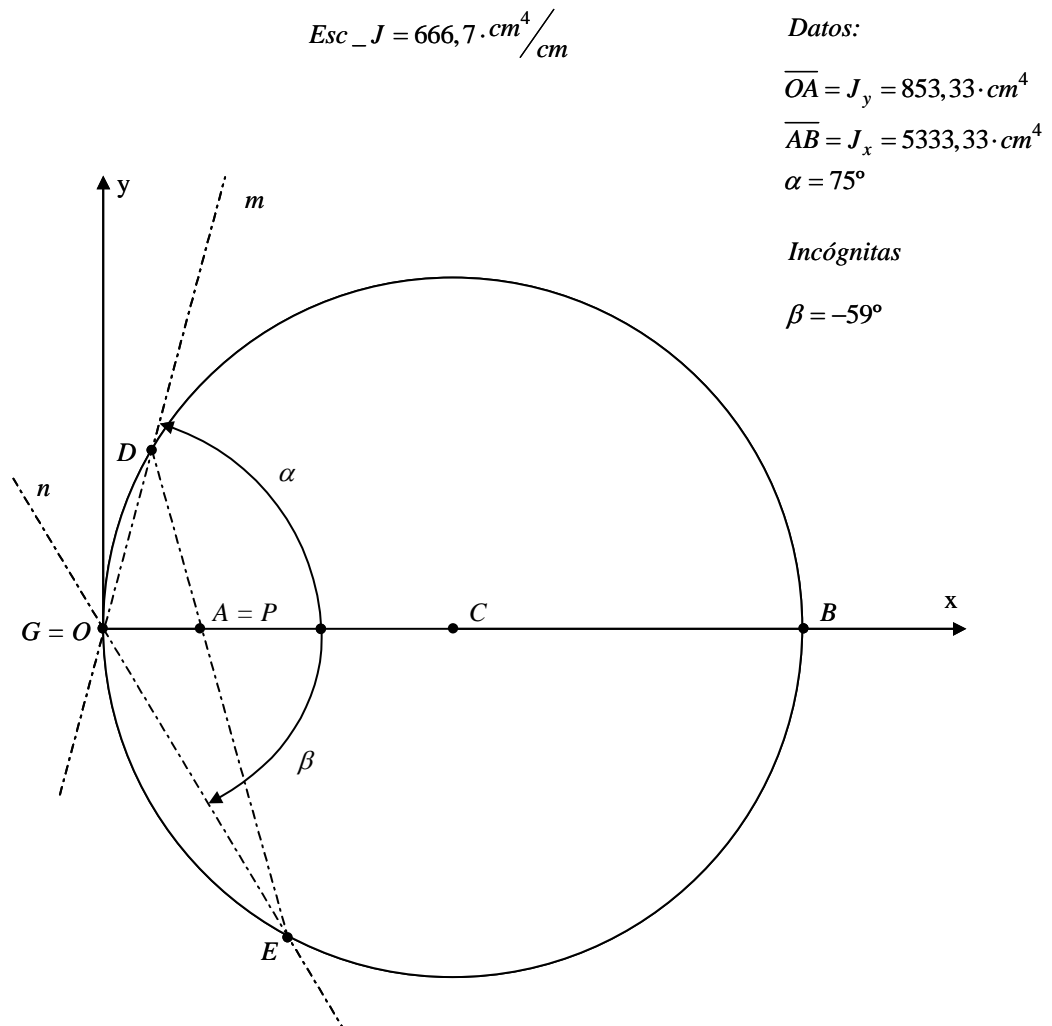


Figura 7.4

Se observa que el ángulo β obtenido es prácticamente coincidente con el calculado en el punto anterior.

4. Verificación de la condición resistente y trazado del diagrama de tensiones normales σ_z

a. Verificación de la condición resistente

Debe verificarse que para la sección calculada en el punto (1), se cumpla que:

$$\sigma_{zm\acute{a}x} \leq \sigma_{zadm}$$

Siendo:

$$\sigma_{zm\acute{a}x} = M f_{xm\acute{a}x} \cdot \left[\frac{\sin(\alpha)}{W_x} + \frac{\cos(\alpha)}{W_y} \right] \quad (5)$$

Donde:

$$W_x = \frac{J_x}{h} \cdot 2 = \frac{5333,33}{20} \cdot 2 = 533,33 \cdot \text{cm}^3$$

$$W_y = \frac{J_y}{b} \cdot 2 = \frac{853,33}{8} \cdot 2 = 213,33 \cdot \text{cm}^3$$

Sustituyendo en (5) por sus valores:

$$\sigma_{z\text{máx}} = 360 \cdot \left[\frac{0,9659}{533,33} + \frac{0,2588}{213,33} \right]$$

$$\sigma_{z\text{máx}} = 360 \cdot [0,001811 + 0,001213]$$

$$\sigma_{z\text{máx}} = 1,09 \cdot \text{kN/cm}^2$$

Siendo:

$$\sigma_{z\text{máx}} \leq \sigma_{adm}$$

$$1,09 \cdot \text{kN/cm}^2 < 1,10 \cdot \text{kN/cm}^2$$

Se verifica la condición resistente.

b. Trazado del diagrama de tensiones normales σ_z

En la figura 7.5 se realiza dicho diagrama.

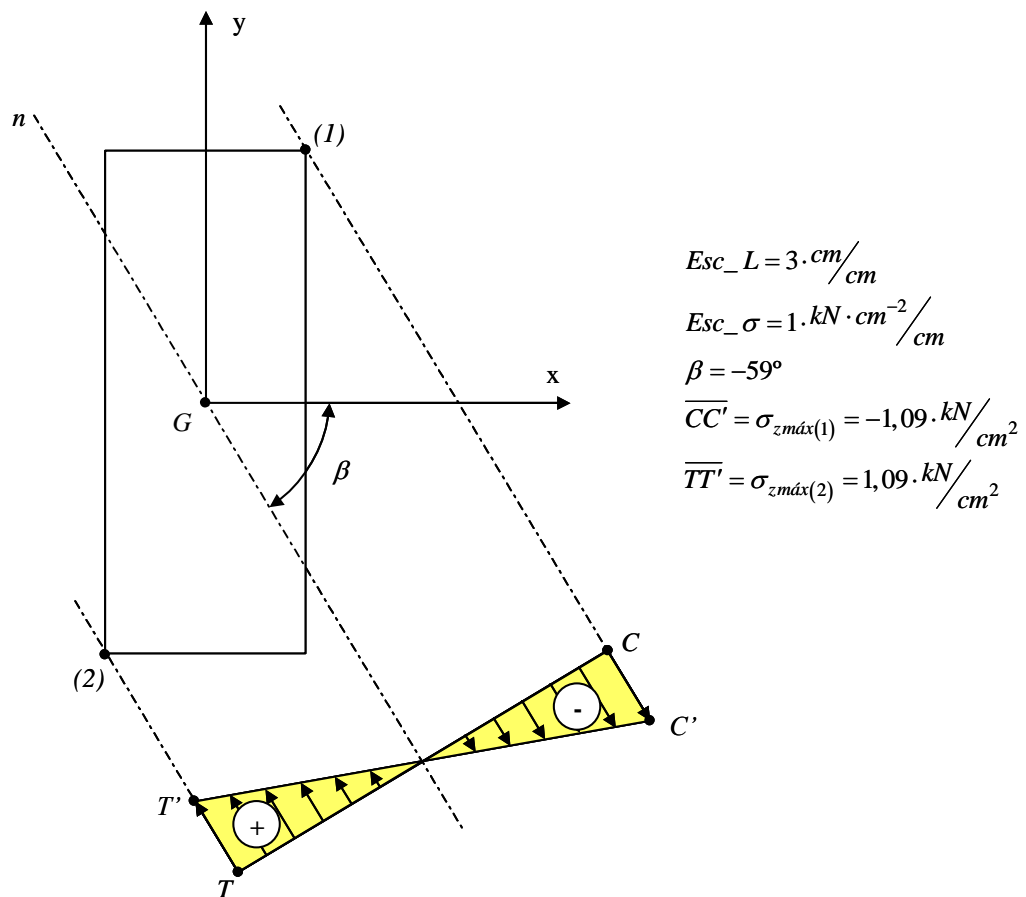


Figura 7.5